Correction du devoir surveillé $n°6$

Problème A :

On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Dans le cas où $\alpha = 0$, il s'agit de la série harmonique qui est une série divergente. /1
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_-$ et $n \in [\![3, +\infty[\![$. On a $\ln(n) \geqslant \ln(3) \geqslant \ln e = 1$ donc, par croissance de la fonction $x \longmapsto x^{-\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient $(\ln n)^{-\alpha} \geqslant 1$. /1
3. Supposons que $\alpha \leqslant 0$. Pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant u_n$. Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que si $\alpha \leqslant 0$ alors la série $\sum u_n$ diverge. /1
4. Dans cette question, on suppose que $\alpha > 0$.
   (a) La fonction ln est continue sur $[2; +\infty[$ à valeurs dans $[\ln(2); +\infty[$ avec $\ln(2) > 0$. La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, produit et inverse (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues, on en déduit que f est continue sur $[2; +\infty[$. /1
   Soit a et b deux réels de $[2; +\infty[$ tels que $a \leqslant b$. On a $0 < \ln(a) \leqslant \ln(b)$ (car ln est croissante) donc $0 < (\ln(a))^\alpha \leqslant (\ln(b))^\alpha$ (car $\alpha \geqslant 0$) et $0 < a \leqslant b$. D'où $0 < a\,(\ln(a))^\alpha \leqslant b\,(\ln(b))^\alpha$. Finalement, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient $f(a) \geqslant f(b)$. f est décroissante sur $[2; +\infty[$.
   (b) Pour $n \in [\![2, +\infty[\![$, on a $I_n = \displaystyle\int_2^n u'(t)\,u(t)^{-\alpha}\mathrm{d}t$ avec $u : t \mapsto \ln(t)$.
   - Si $\alpha \neq 1$ alors $I_n = \left[\frac{u(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^n$ ce qui donne $I_n = \frac{(\ln(n))^{1-\alpha} - (\ln(2))^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
   - Si $\alpha = 1$ alors $I_n = [\ln(u(t))]_2^n$ ce qui donne $I_n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$. /1

   (c)
   - Si $\alpha = 1$ alors $I_n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \longrightarrow +\infty$.
   - Si $\alpha < 1$, on a $1 - \alpha > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(n))^{1-\alpha} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.
   - Si $\alpha > 1$, on a $1 - \alpha < 0$ et $\lim(\ln n)^{1-\alpha} = 0$. Par opérations sur les limites, (I_n) converge.

   Finalement, (I_n) est bornée si, et seulement si $\alpha > 1$. /1
   (d) Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$. Comme f est décroissante sur $[2; +\infty[$, on a
   $$\forall t \in [k, k+1], \qquad u_{k+1} = f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k) = u_k$$
   On en déduit, par croissance de l'intégrale : $u_{k+1} = \displaystyle\int_k^{k+1} u_{k+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} u_k\mathrm{d}t = u_k$.
   Par conséquent, si $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^k f(t)\mathrm{d}t$ /1
   Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. En sommant les inégalités ci-dessus, on obtient grâce à la relation de Chasles :
   $$I_{n+1} = \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^n u_k \leqslant u_2 + \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(t)\mathrm{d}t = I_n + u_2$$

   (e)
   - Si $\alpha \leqslant 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = +\infty$ donc par divergence par minoration $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=2}^n u_k = +\infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge.
   - Si $\alpha > 1$ alors $(I_n + u_2)$ est bornée, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^n u_k\right)$ est donc majorée. Comme la série $\sum u_n$ est à termes positifs, ceci entraîne sa convergence.

   En définitive : $\sum u_n$ converge $\iff \alpha > 1$ /1

5. (a) Par définition, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ Or $n\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$, donc

$$\exp\left(n\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = e\exp\left(-\frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e - \frac{e}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n}$. /2

(b) On a $\dfrac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2} \sim \dfrac{e}{8n(\ln(n))^2}$.
Ce dernier terme est le terme général d'une série convergente d'après les questions précédentes.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$ converge. /2

Problème B :

Considérons l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4b-a & 3b-a \\ c+d & 4d-2c \end{pmatrix}$.

1. Soit $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 4(b_1+\lambda b_2)-(a_1+\lambda a_2) & 3(b_1+\lambda b_2)-(a_1+\lambda a_2) \\ (c_1+\lambda c_2)+(d_1+\lambda d_2) & 4(d_1+\lambda d_2)-2(c_1+\lambda c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4b_1-a_1 & 3b_1-a_1 \\ c_1+d_1 & 4d_1-2c_1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4b_2-a_2 & 3b_2-a_2 \\ c_2+d_2 & 4d_2-2c_2 \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) + \lambda f\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. /1

2. Notons $\mathscr{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a $f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, etc.

Ainsi, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Par le calcul, on trouve $\det(A) = 6$. Par conséquent, $\det(f) \neq 0$

et donc f est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. /2

3. Posons $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

(a) On a $\det_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$ /1

Par conséquent, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) On a $P_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De plus, $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_c} = \left(P_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. /2

(c) On a $f\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. D'où $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. /1

(d) La formule de changement de base pour un endomorphisme nous donne $A = P_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}} T P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_c}$. /1

(e) Comme T est triangulaire supérieure, on calcule facilement son déterminant. On a $\det(T) = 6$ et $\mathrm{tr}(T) = 7$. Les matrices A et T étant semblables, comme le déterminant et la trace sont des invariants de similitude, c'est cohérent que T ait le même déterminant et la même trace que A. /1

(f) On a $T = D + E_{1,2}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. De plus, $DE_{1,2} = E_{1,2} = E_{1,2}D$. D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, /2

$$T^n = (D + E_{1,2})^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} E_{1,2} = D^n + nE_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f^n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f)^n = A^n = P_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}} T^n P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_c}$. Par le calcul, on obtient /1

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f^n) = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n & 0 & 0 \\ -n & 2n+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} - 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} - 2 \times 3^n & 2 \times 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

<u>Problème C :</u>

Si i et j sont deux entiers naturels, on note $S_{i,j}$ (respectivement $S'_{i,j}$) l'ensemble des familles $u = (u_k)_{k \in [\![0,i]\!]}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $u_0 + u_1 + \cdots + u_i = j$ (respectivement $u_0 + u_1 + \cdots + u_i \leqslant j$).

1. Soit $p \in \mathbb{N}$, on va démontrer la propriété suivante par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}.$$

- <u>Initialisation :</u> $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{p+k}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$ donc $P(0)$ est vraie. /1
- <u>Hérédité :</u> Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel $P(n)$ soit vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} + \binom{p+n+1}{p} \underset{HDR}{=} \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} \underset{Pascal}{=} \binom{p+n+2}{p+1}$$

- <u>Conclusion :</u> Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

2. On a que $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$ sont inclus dans $[\![0,j]\!]^{i+1}$ qui est un ensemble de cardinal $(j+1)^{i+1}$. Donc $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$ sont des ensembles finis. Dans la suite, on note $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ les cardinaux respectifs de $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$. /1

3. $S_{1,2} = \{(0,2);(1,1);(2,0)\}$ donc $s_{1,2} = 3$. $S'_{1,2} = \{(0,0);(1,0);(1,0);(0,2);(1,1);(2,0)\}$ donc $s'_{1,2} = 6$ /1

4. Pour $i = 0$, $S_{0,j}$ (respectivement $S'_{0,j}$) est l'ensemble des entiers u_0 tels que $u_0 = j$ (respectivement $u_0 \leqslant j$). Donc $s_{0,j} = 1$ et $s'_{0,j} = j+1$. Pour $j = 0$, on a $S_{i,0} = S'_{i,0} = \{0_{\mathbb{N}^{i+1}}\}$ donc $s_{i,0} = s'_{i,0} = 1$. /1

5. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{i,j} : & S_{i+1,j} & \longrightarrow & S'_{i,j} \\ & u & \longmapsto & u|_{[\![0,i]\!]} \end{array}.$$

Montrons que cette application est bien définie c'est-à-dire que pour tout $u \in S_{i+1,j}$, $\varphi(u) \in S'_{i,j}$.

Soit $u=(u_k)_{k\in[\![0,i+1]\!]}\in S_{i+1,j}$. Donc $u_0+u_1+\cdots+u_i+u_{i+1}=j$, d'où $u_0+u_1+\cdots+u_i=j-u_{i+1}\leqslant j$. Donc $\varphi(u)=u|_{[\![0,i]\!]}\in S'_{i,j}$.
Montrons que φ est surjective. Soit $u=(u_k)_{k\in[\![0,i]\!]}\in S'_{i,j}$, posons $u_{i+1}=j-u_0-u_1-\cdots-u_i$. On a $u_{i+1}\in\mathbb{N}$ et en posant $\tilde{u}=(u_k)_{k\in[\![0,i+1]\!]}\in S_{i+1,j}$, on obtient $\varphi(\tilde{u})=u$. Donc tout élément de $S'_{i,j}$ admet un antécédent par φ. Donc φ est surjective.
Montrons que φ est injective. Soient u et v dans $S_{i+1,j}$ telles que $\varphi(u)=\varphi(v)$.
Pour tout $k\in[\![0,i]\!]$, $u_k=v_k$. De plus $u_{i+1}=j-u_0-u_1-\cdots-u_i=j-v_0-v_1-\cdots-v_i=v_{i+1}$.
Donc $u=v$. Donc φ est injective.

Conclusion : φ est bijective. /3

6.

$$\begin{aligned}
S'_{i,j+1}&=\{u=(u_k)_{k\in[\![0,i]\!]}\in\mathbb{N}^{i+1}\text{ telles que }u_0+u_1+\cdots+u_i\leqslant j+1\}\\
&=\{u=(u_k)_{k\in[\![0,i]\!]}\in\mathbb{N}^{i+1}\text{ telles que }u_0+u_1+\cdots+u_i\leqslant j\}\\
&\qquad\bigsqcup\{u=(u_k)_{k\in[\![0,i]\!]}\in\mathbb{N}^{i+1}\text{ telles que }u_0+u_1+\cdots+u_i=j+1\}\\
&=S'_{i,j}\bigsqcup S_{i,j+1}
\end{aligned}$$

D'où $s'_{i,j+1}=s_{i,j+1}+s'_{i,j}$. On en déduit donc que $s'_{i+1,j+1}=s_{i+1,j+1}+s'_{i+1,j}$.

Or d'après la question 4, $s_{i+1,j+1}=s'_{i,j+1}$. On obtient alors $s'_{i+1,j+1}=s'_{i,j+1}+s'_{i+1,j}$. /2

7. Soit $i\in\mathbb{N}$, on va démontrer la propriété suivante par récurrence sur $j\in\mathbb{N}$: $P(j)$: $s'_{i+1,j}=\sum_{k=0}^{j}s'_{i,k}$.

- Initialisation : $s'_{i+1,0}=1=s'_{i,0}=\sum_{k=0}^{0}s'_{i,k}$ donc $P(0)$ est vraie. /1
- Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $j\in\mathbb{N}$ tel $P(j)$ soit vraie.

$$s'_{i+1,j+1}=s'_{i,j+1}+s'_{i+1,j}\underset{HDR}{=}s'_{i,j+1}+\sum_{k=0}^{j}s'_{i,k}=\sum_{k=0}^{j+1}s'_{i,k}$$

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité. Pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$,

$$s'_{i+1,j}=\sum_{k=0}^{j}s'_{i,k}\,.$$

8. Soit $j\in\mathbb{N}$, on va démontrer la propriété suivante par récurrence sur $i\in\mathbb{N}$: $P(i)$: $s'_{i,j}=\binom{i+j+1}{i+1}$.

- Initialisation : $s'_{0,j}=j+1=\binom{j+1}{1}$ donc $P(0)$ est vraie. /1
- Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $i\in\mathbb{N}$ tel $P(i)$ soit vraie.

$$s'_{i+1,j}\underset{Q7}{=}\sum_{k=0}^{j}s'_{i,k}\underset{HDR}{=}\sum_{k=0}^{j}\binom{i+k+1}{i+1}\underset{Q1}{=}\binom{i+j+2}{i+2}$$

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité. Pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$,

$$s'_{i,j}=\binom{i+j+1}{i+1}.$$

9. D'après les question 5 et 8, on a, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $s_{i,j}=\binom{i+j}{i}$. La formule reste vraie pour $i=0$.
Conclusion : pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $s_{i,j}=\binom{i+j}{i}$. /1